

可变光照条件下的人脸图像识别

胡元奎 汪增福

(中国科学技术大学自动化系,合肥 230027)

摘要 对于人脸图像识别中光照变化的影响,传统的解决方法是待识别图像进行光照补偿,先使它成为标准光照条件下的图像,然后和模板图像匹配来进行识别。为了提高在光照条件大范围变化时,人脸图像的识别率,提出了一种新的可变光照条件下的人脸图像识别方法。该方法首先利用在 9 个基本光照方向下分别获得的 9 幅图像来构成人脸光照特征空间,再通过这个光照特征空间,将图像库中的人脸图像变换成与待识别图像具有相同光照条件的图像,并将其作为模板图像;然后利用特征脸方法进行识别。实验结果表明,这种方法不仅能够有效地解决人脸识别中由于光照变化影响所造成的识别率下降的问题,而且对于光照条件大范围变化的情况,也可以得到比较高的正确识别率。

关键词 人脸图像识别 光照特征空间 特征脸

中图法分类号: TP391.41 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2005)07-0844-06

Face Recognition under Different Illuminations

HU Yuan-kui, WANG Zeng-fu

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027)

Abstract To eliminate the effects of the changes of lightings, the conventional approaches firstly produce a compensation based face image under standard illumination from the input image, and then match it with the face templates in a database. In this paper, a novel face recognition approach for different illumination conditions is proposed. The proposed method generates a new gallery under the same lighting conditions with an input image instead of transforming the input image. First, a face illumination eigenspace is constructed from nine face images of the same person taken from nine basic directions respectively. And then, the face images in the face image database are transformed into the rendered images taken under the same illumination with the input image based on the face illumination eigenspace. Finally, the input image is matched with the newly rendered images which are regarded as a new gallery, to perform the recognition task. The experimental results show that the proposed approach can efficiently eliminate the effects of different illuminations, and has a high recognition rate in the illumination conditions with remarkable changes.

Keywords face recognition, illumination eigenspace, Eigenface

1 引言

目前,虽然在受控的观测条件下,人脸图像识别可以取得比较高的识别率,但是,当光照条件或待识别人脸的姿态变化时,识别率则急剧下降,其中,光照条件的变化是影响人脸识别系统性能的主要因素。因此,能否从根本上解决该问题将直接关系到人脸识别的实用化进程。

早期的人脸识别研究一般假设获取人脸图像时的光照条件是不变的,可是在诸如图像监视、嫌疑人图像识别、安全系统等实际应用中,这种苛刻的假设条件事实上是做不到的。图 1 说明了光照变化对图像的影响。由图 1 可以看出,在不同的光照条件下所获得的同一个人同一姿态下的人脸图像其灰度差别可能很大。

目前,解决不同光照条件下人脸识别问题的方法主要有以下几种^[1, 2]:

收稿日期:2004-07-21;改回日期:2004-12-20

第一作者简介:胡元奎(1979 -),男,2001 年获中国科学技术大学自动化系学士学位,现为中国科学技术大学自动化系硕博连读博士研究生。主要研究领域为图像处理、模式识别、人脸识别。E-mail:zfwang@ustc.edu.cn



图1 不同光照条件下拍摄的图像
Fig. 1 Images under different lighting

(1) 提取光照不变特征的方法 该类方法包括对图像进行光照归一化处理^[3]、对图像进行浮雕化处理(embossing)^[4]和采用边缘图像表示等方法,这些方法在光照条件变化不大的情况下,虽可以获得比处理前更好的识别效果,但是,当光照条件变化比较大时,效果仍不明显;

(2) Appearance-Based 方法^[5,6] Appearance-Based 方法只有在待识别图像和训练图像的光照条件相似的情况下才有好的识别效果;

(3) Class-Based 方法 该方法假设人脸是朗伯表面,并假设观测图像中没有阴影区域出现,这样,具有同一姿态的人脸在不同光照条件下的图像就能构成一个线性光照空间,在这个空间进行识别就不受光照变化的影响^[7,8],如 Illumination cone 方法^[9]、商图像方法^[10]都属于这一类;

(4) Model-Based 方法^[11] 该方法首先从灰度观测图像出发提取人脸的3维信息,并据此建立人脸的3维模型,但是,这种方法要求光照条件已知或者对象的形状和反射特性已知。

上述几种方法有一个共同的特点,即都是通过对待识别图像进行处理来使处理后的待识别图像与标准光照条件下的模板图像尽可能保持一致。但是,当待识别图像的光照条件和标准光照条件差别较大时,要将其完全正确地变换成标准光照条件下的图像是一件困难的工作,而且,完成这种变换的计算量一般也很大。

为此,本文提出一种由基图像来生成与待识别图像具有相同光照条件的模板图像的方法。该方法是先将在9个点光源分别照射下拍摄得到的9幅人脸图像作为基图像来构成人脸光照空间;然后,通过线性合成来生成与待识别图像的光照条件相一致的模板图像;最后,通过将待识别图像与新生成的上述模板图像进行匹配来完成人脸识别任务。实验结果表明,该方法不仅能够有效地解决人脸识别中光照

变化的问题,而且有比较高的识别率;此外,该方法的计算量也较小。

2 人脸光照空间

研究表明,在假设人脸表面是朗伯表面,并且观测中没有阴影区域出现的条件下,利用固定视点下3幅不同光照条件下拍摄的图像可以构成一个3维线性光照空间^[8],据此可以表示在这个固定视点下观察到的所有光照条件下的人脸图像。Hallinan在无需朗伯表面假设的情况下,进一步提出了一种利用5维线性光照空间来表示在固定视点下观察得到的所有光照条件下的图像的方法^[7]。Hallinan还利用主成分分析方法来训练得到构成这个5维线性空间的基图像,而与这5个基图像对应的光照方向分别是:frontal lighting, slide lighting, lighting from above, lighting from a corner 和 extreme slide lighting。Belhumeur 和 Kriegman 的研究表明,在视点固定的条件下,物体在任意数目的点光源照射下拍摄的所有图像可构成一个 n 维多面锥(illumination cone)^[12]。这里, n 等于物体表面法向量的个数,该多面锥的维数可以降低到9维^[13]。Basri 和 Jacobs 证明了朗伯表面物体在独立光源照射下的所有反射函数均落在一个9维线性空间中,这说明,朗伯表面物体在比较大范围光照变化条件下拍摄的图像可以用一个9维线性空间表示^[14]。

上述研究成果表明,可以找到一个线性光照空间,使得人脸在固定视点的所有光照条件下拍摄的图像均落在这个线性空间内。在 Hallinan 和 Lee 等工作^[7,13]的基础上,本文提出了一种构造9维人脸光照空间的方法,即选择9个光照方向作为基本光照方向,并将在这9个光照方向下获得的图像作为基图像来构造9维线性人脸光照空间。如果用 (φ, θ) (其中 φ 表示方位角, θ 表示仰角)表示光照方向,则这9个基本光照方向可分别取为: $(0^\circ, 0^\circ)$, $(30^\circ, 30^\circ)$, $(-30^\circ, 30^\circ)$, $(30^\circ, 75^\circ)$, $(-30^\circ, 75^\circ)$, $(60^\circ, 45^\circ)$, $(-60^\circ, 45^\circ)$, $(90^\circ, 30^\circ)$, $(-90^\circ, 30^\circ)$ 。

这9个基本光照方向下的9幅基图像,可以是分别在每一个光照方向下拍摄的,也可以是通过图像生成技术虚拟生成的。本文采用的是实拍的图像。将9个基本光照方向下的9幅图像分别记为: $I_i, i=1, 2, \dots, 9$ 表示第*i*个光源方向,而将要合成的

新的光照方向下的图像记为 I_{gen} , 则

$$I_{gen} = \sum_{i=1}^9 \eta_i \delta_i I_i \quad (1)$$

其中, $\eta_i \in [0, 1]$ 为第 i 个方向的光源强度的权值, δ_i 为第 i 个方向的光源开关标志, 当该光源打开时为 1, 否则为 0。

在相同的光照条件下, 若视点固定, 则人脸位置固定的不同的人脸图像的灰度分布趋势应该是一致的。反之, 如果两幅人脸图像的灰度分布一致, 那么就可以认为这两幅图像是在近似相同的光照条件下拍摄的。

设待识别图像为 X , 若要合成与待识别图像 X 光照条件相同的模板图像, 则首先要确定待识别图像的光照条件, 即确定与图像库中每一个人的每一幅基图像对应的参数 δ_i 和 η_i 。对于图像库中的对应于第 k 个人脸的基图像 $I_i, i = 1, 2, \dots, 9$, 其代价函数为

$$f = (X - \sum_{i=1}^9 \eta_i \delta_i I_i)^T (X - \sum_{i=1}^9 \eta_i \delta_i I_i) \quad (2)$$

选择使得 f 最小, 并且满足

$$\eta_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^9 \eta_i = 1$$

的 δ_i 和 η_i 即为所求的参数, 然后利用式 (1) 就可以得到对应于第 k 个人脸的合成的模板图像。

为了证明所选择的基图像的合成效果, 本文进行了如下实验, 即首先使摄像机和人脸位置固定, 在光照方向的取值范围 (仰角 $\theta: [0^\circ, 75^\circ]$ 、方位角 $\varphi: [-120^\circ, 120^\circ]$) 内, 沿仰角和方位角两个方向按照的采样间隔采集人脸图像, 除此之外, 还采集了点光源位于方位角 0° 、仰角 90° 位置时的人脸图像, 按照上面的采集步骤一共可以得到 103 幅图像; 然后对上述每一幅拍摄图像 P , 利用所选择的 9 幅基图像, 按照前面所述生成与待识别图像具有相同光照条件的模板图像的方法来合成与图像 P 具有相同光照条件的新图像 Q 。部分实验结果如图 2、图 3 所示。

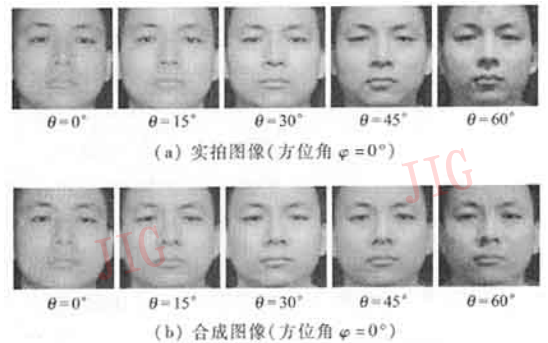


图 2 实拍图像与合成图像的比较 (θ 为仰角)

Fig. 2 Comparison between the real images and the combined images



图 3 实拍图像与合成图像的比较 (φ 为方位角)

Fig. 3 Comparison between the real images and the combined images

比较图2和图3可以看出,合成图像在光照方向的方位角小于 105° 时,与实拍图像基本一致,而在光照方向的方位角为 120° 时,则与实拍的图像有差别。

为了评价合成图像与实拍图像的差别,对实拍图像和对应的合成图像进行了相关性分析。假设待评价图 Z 均为 $M \times N$ 大小的8 bit灰度图像,其中,实拍图像为 P ,相应的合成图像为 Q ,则 P 与 Q 的相关性定义为

$$r(P, Q) = \frac{1}{M \times N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left(1 - \frac{P(m, n) - Q(m, n)}{255} \right) \quad (3)$$

根据式(3)通过对实验中的103幅实拍图像与对应的合成图像的相关性系数 r 的计算发现:对所有的实验图像,相关性系数 r 均大于0.94;在光照方向的方位角小于等于 105° 时,相关性系数 $r \geq 0.96$;在光照方向的方位角为 120° 时,相关系数 $0.94 \leq r \leq 0.96$ 。

主观观察以及相关性的定量分析结果均表明,在光照方向的方位角小于 105° 时,所选择的基图像能够很好地构造9维人脸光照空间,据此就可以比较准确地合成在视点固定、光照条件大范围变化情况下的人脸图像。因为在方位角等于以及大于 120° 方向上的光源,基本上只能照射到部分脸颊以及头的后部,所以对人脸识别的影响很小。

3 基于 Eigenfaces 的人脸识别方法

基于 Eigenfaces 的人脸识别方法首先是由 Sirovich 和 Kirby 作为主成分分析方法的一个应用而提出来的。之后, Turk 和 Pentland 在此基础上进行了改进和发展^[5]。目前, Eigenfaces 方法是公认的具有较好性能的人脸识别方法之一。

Eigenfaces 方法首先从人脸图像集合中提取人脸的特征信息,并利用这些特征信息来表示人脸图像。在数学上,就是要寻找人脸图像向量分布的主要成分,或者人脸图像集合中所有图像的方差矩阵的特征向量,这些特征向量可以是表现人脸图像之间差别的一组特征,称为特征脸(Eigenfaces)。将这些特征脸作为一组基,就可以构成一个线性人脸空间。这样,每一幅人脸图像都可以由这组特征脸线性组合来表示,然后就可以将上述线性组合所对应的权系数作为依据,用于人脸识别。

设人脸图像库中的图像为 $H = \{H_1, H_2, \dots,$

$H_M\}$,其中, H_k 为人脸图像库中的第 k 幅图像, M 为人脸图像库中图像的总数,则人脸图像库中图像的总散布矩阵为

$$C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (H_k - m)(H_k - m)^T \quad (4)$$

其中, m 为人脸图像库中所有图像的平均图像。

定义 $A = \frac{1}{\sqrt{M}} [H_1 - m, H_2 - m, \dots, H_M - m]$, 则有

$$C = AA^T \quad (5)$$

这里, C 是 $n \times n$ 大小的矩阵,虽然直接计算它所对应的特征向量 U 是很困难的,但可以利用奇异值分解(SVD)进行计算^[15]:

设 $D = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M] \in R_{M \times M}$, 其中 $\lambda_k (k=1, \dots, M)$ 为矩阵 AA^T 和 $A^T A$ 的非零特征值,且 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M$,令 U 为 AA^T 的特征向量, V 为 $A^T A$ 的特征向量,则

$$U = AVD^{-1/2} \quad (6)$$

通过式(6)求得的特征向量 U 即为矩阵 C 的特征向量。 $A^T A$ 是 M 维的,由于一般 M 比 n 小许多,因此计算要简便很多。

本文将人脸图像库中的第 k 幅人脸图像(简称库图像) H_k 向由特征脸构成的 M 维人脸空间投影来得到图像 H_k 的权值,即

$$\Omega_k = U^T (H_k - m), k = 1, 2, \dots, M \quad (7)$$

第 k 幅库图像的权值矢量记为 $\Omega_k = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M]^T$ 。

同样,对于待识别人脸图像 X ,可通过向 M 维人脸空间投影来得到它的权值矢量,即

$$\Omega = U^T (X - m) \quad (8)$$

待识别人脸图像的权值与人脸图像库中每一幅人脸图像的权值之间的欧氏距离为

$$e_k = \|\Omega - \Omega_k\|, k = 1, 2, \dots, M \quad (9)$$

如果 $e_{\min} = \min(e_k, k = 1, 2, \dots, M)$,并且 e_{\min} 小于阈值 T ,那么就判定待识别人脸图像与第 k 幅库图像是同一个人,否则,判定待识别人脸图像在人脸图像库中不存在。

4 可变光照条件下的人脸图像识别

Eigenfaces 方法对光照条件的变化很敏感,且随着光照条件变化的加剧,识别率急剧下降。为了校正光照条件变化对识别的影响,传统的方法是对待

识别人脸图像进行处理,使它成为标准光照条件下的人脸图像,然后和模板图像进行匹配。这种方法在光照条件变化不大时,效果不错,但是当光照条件变化比较大时,只利用一幅待识别人脸图像,很难将它正确地变换成标准光照条件下的人脸图像,对于提高识别率效果不明显。为此,本文提出一种利用前面所述的人脸光照空间,人脸将图像库中的标准人脸图像变换到待识别人脸图像的光照条件下来生成与待识别人脸图像的光照条件相一致的模板图像,然后将待识别人脸图像和生成的模板图像进行匹配的方法。

在所建立的图像库中,每一个人有 9 幅图像,这 9 幅图像就是前面所述的每一个人的基图像。对于待识别人脸图像 X 和图像库中对应第 k 个人的人脸图像(即第 k 个人脸的 9 幅基图像),首先利用式(2)计算与基图像对应的权值(即对应的 δ_i 和 η_i);然后将这组权值代入式(1),就可以得到与待识别图像 X 光照条件相一致的对应第 k 个人的合成人脸图像 S_k , S_k 即为新生成的模板图像。

对于同一幅待识别人脸图像 X ,由于与根据图像库中每一个人的基图像计算出来的权值对应的都是待识别人脸图像 X 的光照条件,所以它们是一致的。因此,可以只利用图像库中某一个人脸图像的基图像来计算权值,并把这个权值作为每一个人脸图像的权值来合成新的模板图像。这样,就得到了与待识别人脸图像 X 的光照条件相同的模板图像 S_1, S_2, \dots, S_M ,其中 M 为图像库中的人脸图像总数。

人脸图像识别时,首先根据式(8)计算每一幅模板图像 S_k ($k=1, 2, \dots, M$) 在特征脸空间中的权值矢量 Ω_k ($k=1, 2, \dots, M$),并计算待识别人脸图像 X 在特征脸空间的权值矢量 Ω ;然后根据式(9)计算矢量 Ω 与 Ω_k ($k=1, 2, \dots, M$) 的欧氏距离 e_k ($k=1, 2, \dots, M$)。如果 $e_{\min} = \min(e_k, k=1, 2, \dots, M)$ 小于阈值 T ,那么就判定待识别人脸图像与第 k 幅模板图像是同一个人的人脸图像,否则,判定待识别人脸图像在库图像中不存在。

5 实验结果

为了验证本文人脸识别方法的效果,构建了人脸图像库 A 和人脸图像库 B 两个图像库用于进行人脸识别,其中,图像库 A 中包含 10 个人的人脸图像,每个人 15 幅,共 150 幅图像;实验是先将图像库 A 中每

个人 15 幅图像中的 2 幅人脸图像作为训练图像,然后将剩下的图像中,光照方向(方位角,仰角)为 $(0^\circ, 60^\circ), (30^\circ, 45^\circ), (-30^\circ, 45^\circ), (30^\circ, 60^\circ), (-30^\circ, 60^\circ), (60^\circ, 30^\circ), (60^\circ, 60^\circ)$ 的 7 幅人脸图像作为测试集 1,而将光照方向为 $(90^\circ, 45^\circ), (-90^\circ, 45^\circ), (90^\circ, 60^\circ), (-90^\circ, 60^\circ), (90^\circ, 75^\circ), (-90^\circ, 75^\circ)$ 的 6 幅人脸图像作为测试集 2。图像库 B 是在图像库 A 的基础上,向训练集中加入每个人 9 幅基图像,测试集不变,共 240 幅图像。

实验时,首先对图像库中的人脸图像进行几何归一化^[16],即手动选择图像中左右眼眼角 E_{left} 和 E_{right} ,同时旋转图像,使 E_{left} 和 E_{right} 连线水平,并根据 E_{left} 和 E_{right} 之间的距离 $2d$ 切割出人脸图像区域,其大小为 $3d \times 3d$,再对切割得到的图像进行缩小/放大变换,得到统一大小 (256×256) 的标准图像,缩放倍数为 $\beta = 3d/256$;然后对几何归一化后的图像进行灰度归一化,即利用灰度直方图来调整图像的均值和方差,使得所有图像具有统一的均值和方差。

实验 1 直接采用 Eigenfaces 方法进行人脸识别

首先利用图像库 A 中属于训练集的人脸图像(20 幅)计算特征脸,为了减小光照的影响,选择的特征脸为除去与前面 3 个最大的特征值对应的 3 个特征向量后剩下的 17 个特征向量;然后将人脸图像库 A 训练集中的人脸图像作为模板图像,再利用 Eigenfaces 方法对测试集 1 和测试集 2 中的人脸图像进行识别,识别结果如表 1 所示。

表 1 直接采用 Eigenfaces 方法识别的正确率(%)

Tab. 1 Recognition rates of the Eigenfaces methods with the original gallery

	测试集 1	测试集 2	所有测试图像
将图像库中的标准图像作为模板图像	77.14	20	50.77

实验 2 先利用人脸光照空间来合成新的模板图像,然后采用 Eigenfaces 方法进行识别,其特征脸的计算与实验 1 相同。对于测试集 1 和测试集 2 中的每一幅待识别人脸图像,按照前文所述的方法,利用人脸图像库 B 中的基图像来合成新的模板图像,然后采用 Eigenfaces 方法对待识别人脸图像和新的模板图像进行识别,识别结果如表 2 所示。

实验 1 的结果说明, Eigenfaces 方法对光照变化很敏感,当光照条件的变化增大时,正确识别率急剧下降。实验 2 的结果表明,将利用人脸光照空间合成的图像作为模板图像,对于两个测试集都有比较

表2 先利用光照空间合成新的模板图像,然后采用 Eigenfaces 方法识别的正确率(%)

Tab.2 Recognition rates of the Eigenfaces methods with the combined gallery

	测试集1	测试集2	所有测试图像
将合成的图像作为模板图像	95.71	93.33	94.62

高的正确识别率,即它们受光照变化的影响比较小。比较两个实验的结果易见,将利用人脸光照空间合成的图像作为模板图像,不仅正确识别率大大提高,而且对于光照变化比较大(测试集2)的情况仍然有较高的正确识别率,这就在很大程度上减小了光照变化对人脸识别的影响。

6 结论

本文提出了一种利用人脸光照空间生成的新模板图像来消除人脸识别中由于光照变化所产生的不良影响的方法,并给出了具体系统的实现方案。实验证明,这种方法不仅能够有效地解决人脸识别中由于光照变化影响所造成的识别率下降的问题,而且对于光照条件大范围变化的情况,仍有比较高的正确识别率。本文提出的算法需要在更大规模的人脸图像库上验证。

参考文献(References)

- Adini Y, Moses Y, Ullman S. Face recognition: The problem of compensating for changes in illumination direction [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1997, 19(7): 721 ~ 732.
- Zhao W, Chellappa R, Rosenfeld A, et al. Face recognition: A literature survey [R]. Technical Report CAR-TR-948, Center for Automation Research, University of Maryland, College Park, USA, 2000:1 ~ 67.
- Liu Hong, Li Jin-tao, Miao Jun. Illumination compensation based on multi-method integration in face detection [J]. Journal of system simulation, 2001, 13(Suppl): 46 ~ 50. [刘宏,李锦涛,苗军.多方法融合来解决人脸检测中的光照补偿[J].系统仿真学报增刊, 2001, 13(Suppl): 46 ~ 50.]
- Kouzani A Z, He F, Sammut K. Towards invariant face recognition [J]. Information Sciences, 2000, 123(1-2): 75 ~ 101.
- Turk M, Pentland A. Face recognition using eigenfaces [A]. In: Proceedings of IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition [C], Hawaii, USA, 1991: 586 ~ 591.
- Belhumeur P N, Hespanha J P, Kriegman D J. Eigenfaces vs. Fisherfaces; Recognition using class specific linear projection [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1997, 19(7): 711 ~ 720.
- Hallinan P W. A low-dimensional representation of human faces for arbitrary lighting conditions [A]. In: Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition [C], Seattle, WA, USA, 1994: 995 ~ 999.
- Shashua A. Geometry and photometry in 3D visual recognition [D]. PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, 1994.
- Georghiades A S, Belhumeur P N, Kriegman D J. From few to many: Illumination cone models for face recognition under variable lighting and pose [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2001, 23(6): 643 ~ 660.
- Shashua A, Riklin-Raviv T. The quotient image: Class-based re-rendering and recognition with varying illuminations [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2001, 23(2): 129 ~ 139.
- Zhao W, Chellappa R. Robust face recognition using symmetric shape - from-shading [R]. Technical Report CAR-TA-919, Center for Automation Research, University of Maryland, College Park, USA, 1999.
- Belhumeur P N, Kriegman D J. What is the set of images of an object under all possible illumination conditions [J]. International Journal of Computer Vision, 1998, 28(3): 1 ~ 16.
- Lee Kuang-Chih, Ho J, Kriegman D J. Nine points of light: Acquiring subspaces for face recognition under variable lighting [A]. In: Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition [C], Hawaii, USA, 2001, 1: 519 ~ 526.
- Basri R, Jacobs D. Lambertian reflectance and linear subspaces [A]. In: Proceedings of the IEEE 8th International Conference on Computer Vision [C], Vancouver, Canada, 2001, 2: 383 ~ 390.
- Zheng Hui-rao, Chen Shao-lin, Mo Zhong-xi, et al. Numerical computing methods [M]. Wu Han: Wu han University Press, 2002: 310 ~ 313. [郑慧娆,陈绍林,莫忠息等.数值计算方法[M].武汉:武汉大学出版社, 2002: 310 ~ 313.]
- Peng Hui, Zhang Changshui, Rong Gang, et al. Research of automated face recognition based on K-L transforms [J]. Journal of Tsinghua University (Sci & Tech). 1997, 37(3): 67 ~ 70. [彭辉,张长水,荣钢等.基于K-L变换的人脸自动识别方法[J].清华大学学报(自然科学版), 1997, 37(3): 67 ~ 70.]